XXIV Ogólnopolski Sejmik Matematyków

Propozycje zagadnień

Temat 1. »Pewnik wyboru«

Opis: Matematycy od lat toczą spory o to, czy wolno nam używać pewnika wyboru do dowodzenia twierdzeń. Dzisiaj chyba już niewielu jest takich, którzy by "nie wierzyli"w pewnik wyboru. Warto napisać, co mówi nam pewnik wyboru oraz jego równoważniki, a przede wszystkim znaleźć jakieś jego ciekawe zastosowania.

Literatura:

[1] J. Musielak,Wstęp do matematyki, PWN, Warszawa 1970,

[2] H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, PWN, Warszawa 1984,

[3] K. Kuratowski, Wstęp do teorii mnogości i topologii, PWN, Warszawa 1972.

Temat 2. »Generowanie liczb losowych«

Opis: Chcąc napisać losowy ciąg zer i jedynek możemy rzucać monetą przyporządkowując przykładowo wyrzuceniu reszki jedynkę, orła - zero. Możemy też w inny sposób "wygenerować" taki ciąg. Chcąc wybrać próbkę statystyczną z danej populacji w celu przeprowadzenia jakiegoś badania trudno byłoby wykonać losowanie spośród wszystkich członków populacji. Dlatego możemy przykładowo przyporządkować każdej osobie liczbę i zastosować jakiś generator liczb losowych.

Literatura:

[1] R. Zieliński, Generatory liczb losowych,. Wyd. Naukowo – Techniczne, Warszawa 1972

Temat 3. »Działania na zbiorach«

Opis: Działania na zbiorach to przykładowo branie sumy, branie części wspólnej, czy branie różnicy symetrycznej. Korzystając z praw logiki matematycznej łatwo wykazać pewne własności tych działań. Dana rodzina zbiorów może być domknięta względem jakiegoś działania. Właśnie w ten sposób definiuje się pewne ważne w matematyce rodziny zbiorów – przykładowo pierścień podzbiorów danego zbioru X, to rodzina zbiorów domknięta względem brania sumy i różnicy. Są też półpierścienie, σ-pierścienie, klasy monotoniczne it.d. Warto napisać coś o własnościach tych klas zbiorów i zależnościach pomiędzy nimi.

Literatura:

[1] W. Marek, J. Onyszkiewicz, Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach, PWN, Warszawa 1999,

[2] W. Kołodziej, Analiza matematyczna, PWN, Warszawa 1978,

[3] P. Halmos, Measure theory, New York 1974.

Temat 4. »APROKSYMACJA FUNKCJI«

Opis: Gdybyśmy chcieli w przybliżyć wykres jakiejś skomplikowanej funkcji ciągłej inną funkcją, którą jesteśmy w stanie dokładnie opisać za pomocą wzorów pierwszym pomysłem mogłoby być naszkicowanie łamanej o podobnym kształcie. Widać, że im na nasza łamana byłaby "gęściej łamana", tym dokładniejsze przybliżenie bylibyśmy w stanie otrzymać. O różnych metodach przybliżania funkcji "gładkich" można napisać korzystając między innymi z książki

Literatura:

[1] H.&J., Musielak, ANALIZA MATEMATYCZNA (tom I, II), UAM, Warszawa 1993.

Temat 5. »RODZAJE ZBIEŻNOŚCI FUNKCJI«

Opis: Wiemy mniej więcej, co to znaczy, że ciąg funkcji f_n jest zbieżny do jakiejś funkcji f – w każdym punkcie x ciąg $f_n(x)$ zbiega do $f(x)$. Żeby zbieżność była jednostajna, potrzeba założyć, że ciągi te zbiegają w podobnym tempie. Łatwo podać przykład funkcji zbieżnej punktowo, która nie jest zbieżna jednostajnie. Okazuje się, że jest o wiele więcej rodzajów zbieżności ciągów funkcyjnych. Ciekawe jest badanie zależności pomiędzy nimi zachodzącymi.

Literatura:

[1] W. Rudin, PODSTAWY ANALIZY MATEMATYCZNEJ, PWN, Warszawa 1998,

[2] R. Sikorski , FUNKCJE RZECZYWISTE, T.I, PWN, Warszawa 1958,

[3] W. Kołodziej, ANALIZA MATEMATYCZNA, PWN, Warszawa 1979.

Temat 6. »JAK RADZIĆ SOBIE Z REKURENCJAMI«

Opis: W wielu problemach matematycznych pojawiają się ciągi określone rekurencyjnie, tzn. kolejny wyraz takiego ciągu jest zadany pewnym wyrażeniem zawierającym wyrazy poprzednie. Korzystając z definicji rekurencyjnej, aby obliczyć wyraz o numerze 10000 powinniśmy najpierw wyznaczyć wszystkie 9999 wyrazów poprzednich. Na szczęście matematyka zna kilka sposobów przekształcania wzorów rekurencyjnych na wzory jawne — pozwalające obliczyć wartość danego wyrazu bez konieczności obliczania wyrazów poprzednich. Praca mogłaby dotyczyć jednej lub kilku takich metod oraz wybranych problemów pokrewnych. Rozważania teoretyczne warto wesprzeć przykładami.

Literatura:

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, MATEMATYKA KONKRETNA, PWN, Warszawa 1996.

[2] K.A. Ross, Ch.R.B. Wright, MATEMATYKA DYSKRETNA, PWN, Warszawa 1996.

[3] A.I. Markuszewicz, CIĄGI REKURENCYJNE, PWN, Warszawa 1955.

Temat 7. »CZY UŁAMKI PROSTE SĄ PROSTE?«

Opis: Ułamkiem prostym nazywamy ułamek o liczniku jeden i mianowniku, który jest liczbą naturalną. Powstaje pytanie, kiedy dany ułamek można przedstawić w postaci sumy dwóch, trzech lub więcej ułamków prostych. Kolejne pytanie dotyczy rozkładu danego ułamka na sumy i różnice ułamków prostych. Ciekawy też jest problem jak wyglądają zbiory wszystkich liczb mających takie przedstawienie.

Pracę można wzbogacić o przykłady metod znajdowania takiego rozkładu. Zachęcamy również autora do przyjrzenia się podobnym zagadnieniom (np. inne postacie rozkładu danego ułamka).

Literatura:

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Matematyka konkretna, PWN, Warszawa 1996.

[2] K.A. Ross, Ch.R.B. Wright, Matematyka dyskretna, PWN, Warszawa 1996.

[3] W. Sierpiński, O rozkładach liczb wymiernych na ułamki proste, PWN, Warszawa 1957.

Temat 8. »Funkcje tworzące«

Opis: *Funkcje tworzące są skutecznym narzędziem zliczania obiektów kombinatorycznych. Dzięki nim można dowiedzieć się ile podzbiorów bez sąsiadów zawiera dany zbiór liczb naturalnych, wyznaczyć liczbę pokryć szachownicy kostkami domino lub ustalić ile jest sposobów wypłacenia danej kwoty pieniędzy. Funkcje tworzące są również stosowane jako metoda rozwiązywania równan rekurencyjnych. Przedmiotem pracy konkursowej może być wprowadzenie do teorii funkcji tworzących, ale szczególnie cenione będą opracowania zawierajace oryginalne pomysły zastosowania funkcji tworzących.*

Literatura:

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik; Matematyka konkretna. PWN 2006. Rozdział 7.

[2] Z. Palka, A. Ruciński; Wykłady z kombinatoryki. WNT 1998. Rodział 5.

[3] Strony internetowe.

Temat 9. »Sieci przepływowe«

Opis: *Problemy związane z sieciami przepływowymi w informatyce mają wiele bezpośrednich zastosowań np przy rozwiązazywaniu zadań transportowych czy projektowaniu sieci komunikacyjnych. Wiele problemów nie związanych bezpośrednio z sieciami można efektywnie rozwiązywać przy pomocy algorytmów dla sieci przepływowych, na przykład problem maksymalnego skojarzenia w grafie. Sieci są badane od wielu lat, powstało bardzo wiele agorytmów, ale wciąż jeszcze dużo jest do zbadania.*

Prace na ten temat nie powinny odstawać od tematu, temat jest obszerny i uczestnicy powinni znaleźć jakieś ciekawe zastosowanie sieci i zaproponować efektywny algorytm.

Literatura:

[1] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin,
Network Flows: Theory, Algorithms and Applications,
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.

[2] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, B.L. Rivest, Wprowadzenie do algorytmów, WNT

[3] R. Sedgewick, Algorytmy w C++ .Grafy, Read Me

Temat 10. »Rozmycie«

Opis: *Niech $\mathcal{P}$ oznacza niepusty (wciąż) zbiór Polaków. Rozważmy funkcję χ typu $\mathcal{P} \ni p \mapsto \chi(p) \in \{0;1\}$ określoną w następujący sposób*

$$\chi(p) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } p \text{ jest osobnikiem mądrym} \\ 0 & \text{jeśli } p \text{ jest osobnikiem głupim} \end{cases} \quad .$$

Mając nadzieję, że w zbiorze wartości χ jest jedynka, stwierdzamy, że podzieliliśmy Polaków na mądrych i głupich — innych możliwości χ nie daje. Polak jest mądry albo głupi (przed szkodą, po szkodzie) …
A gdybyśmy ten prosty i jasny podział **rozmyli**, *tzn. rozważyli $\hat{\chi}\colon \mathcal{P} \to [0;1]$ i przykładowe $\hat{\chi}(p_0) = \frac{1}{7}$? Może doszlibyśmy do ciekawych wniosków i zastosowań?*

Literatura:

[1] J. Kacprzyk, Wieloetapowe sterowanie rozmyte, WNT, Warszawa 2001

[2] A. Łachwa, Rozmyty świat zbiorów, relacji i reguł, Akad. Oficyna EXIT, Warszawa 2001

Temat 11. »Co łączy liczby e, π oraz $\imath$?«

Opis: *Autor pracy może przedstawić wymienione liczby, twierdzenia z nimi związane. W szczególności wzór* $e^{\pi * i} = -1$

Literatura:

[1] podręczniki do analizy rzeczywistej i zespolonej dla studentów matematyki

[2] K. Ciesielski, Z. Pogoda , Diamenty matematyki, Prószyński i S-ka

Temat 12. »Nieporządne funkcje«

Opis: *W szkole uczymy się przeważnie o bardzo porządnych funkcjach- ciągłych, rózniczkowalnych, czasami różniczkowalnych poza kilkoma punktami. A tymczasem jest wiele (znacznie więcej niż tych "porządnych") funkcji, które albo nie są ciągłe w żadnym punkcie, albo mają przeliczalnie wiele punktów ciągłości, albo są wszędzie ciągłe, ale nigdzie nie różniczkowalne. Takie trudno wyobrażalne i niemożliwe do dokładnego narysowania funkcje mają być tematem tej pracy. Najbardziej znane to funkcja Dirichleta, Weierstrassa, Van der Waerdena, Riemanna. Autor pracy na ten temat może omówić (i precyzyjnie uzasadnić) ich własności, może podać własne przykłady ciekawych funkcji.*

Literatura:

[1] Podręczniki do analizy matematycznej dla studentów I roku matematyki.

[2] K. Ciesielski, Z. Pogoda , Diamenty matematyki, Prószyński i S-ka

Temat 13. »A taka porządna funkcja ...«

Opis: *Rozważmy funkcję* $f : [0,1] \to [0,1]$ *daną wzorem* $f(x) = 2x$, *dla* x *z przedziału* $[0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = 2 - 2x$, *dla* x *z przedziału* $[\frac{1}{2}, 1]$. *Bardzo prosta i "porządna" funkcja. Pomyślmy teraz o trajektoriach poszczególnych punktów, czyli o ciągach:* $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$. *Na przykład trajektoria punktu* $\frac{2}{3}$ *to:* $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$. *Innymi słowy,* $\frac{2}{3}$ *to punkt stały tego przekształcenia, czyli inaczej punkt okresowy rzędu 1. Trajektoria punktu* $\frac{2}{5}$ *to:* $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$. *Jest to punkt okresowy rzędu 2. Czy wiesz, że w tym prostym przekształceniu dla dowolnej liczby naturalnej* n *można znaleźć punkty okresowe rzędu* n? *Są tam też takie punkty, których trajektorie tworzą ciągi różnowartościowe. Są tam trajektorie gęste w odcinku* $[0,1]$. *Są też takie punkty* x, *dla których zbiór graniczny* $\omega(x, f)$, *czyli zbiór wszystkich granic częściowych trajektorii* x *jest równy całemu odcinkowi* $[0,1]$. *Chaotyczność tego odwzorowania widac w jeszcze jednym twierdzeniu: istnieją takie domknięte rozłączne podzbiory* X_0 *i* X_1 *odcinka* $[0,1]$ *oraz taka liczba naturalna* m, *że* $g = f^m$ *ma własności:* $g(X_0 \cup X_1) \subset X_0 \cup X_1$; *dla każdego ciągu* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *zer i jedynek istnieje taki punkt* $x \in X_0 \cup X_1$, *że* $g^k(x) \in X_{\alpha_k}$.

Jest jeszcze wiele innych zagadnień związanych z badaniem trajektorii punktów różnych odwzorowań odcinka w siebie. Autor może wybrać niektóre z nich i je omówić, przedstawić, co zaciekawiło go w **Teorii Iteracji**.

Literatura:

[1] L.S. Block, W.A. Coppel, Dynamics in One Dimension, Lecture Notes in Mathematics 1513, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992,

[2] G. Targonski, Topics in iteration Theory, Studia Mathematica Script 6, Vandenhoech&Ruprecht in Gottingen, 1981